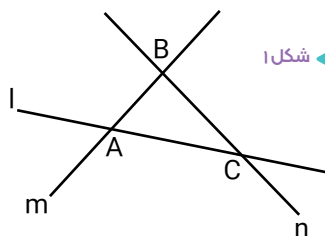
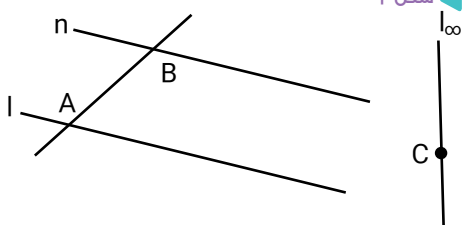




● خسرو داودی و آرش رستگار قسمت سوم: مجموعه پروژه‌های کوچک جایگزینی دو خط متقاطع با دایره برای ریاضی دانان کوچک

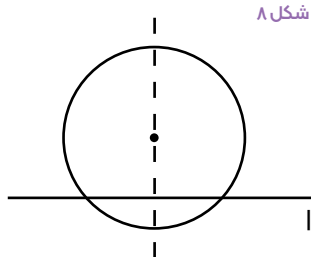
موازی باشند چه اتفاقی می‌افتد؟» مثلاً نقطه C را حرکت دهید و کم‌کم به سمت بی‌نهایت بکشانید. در این صورت زاویه خط‌های l و n کوچک‌تر و کوچک‌تر می‌شود و در نهایت وقتی C به بی‌نهایت پرتاب شد، این دو خط موازی می‌شوند (شکل ۲).



شکل ۱

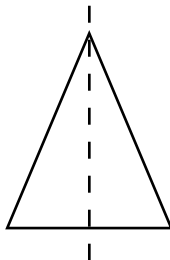
خط‌های l و m یکدیگر را در نقطه A ، خط‌های l و n یکدیگر را در نقطه C و خط‌های m و n یکدیگر را در نقطه B قطع می‌کنند. حال این سؤال پیش می‌آید که: «اگر دو تا از این خط‌ها

می‌توانیم به جای اینکه یک مثلث را سه نقطه در نظر بگیریم که دو به دو با پاره‌خط‌هایی به هم وصل شده‌اند (و البته این سه نقطه نباید روی یک خط قرار بگیرند)، نظری دیگر به مثلث داشته باشیم. مثلث را شکلی بدانیم که از سه خط تشکیل شده است که دو به دو متقاطع‌اند. یعنی هیچ دو تایی از این سه خط موازی نیستند. شکل مثلث را هم می‌توان مطابق شکل ۱ کشید و سه خط را l ، m و n نامید.



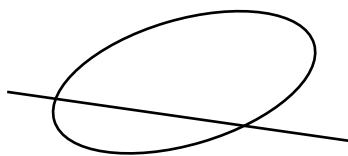
شکل ۸

اگر خطی از مرکز دایره بگذرانیم که بر خط l عمود باشد، شکل ما نسبت به این خط، تقارن آینه‌ای دارد. پس حداکثر این شکل بتواند شبیه یک مثلث متساوی‌الساقین رفتار کند. چون مثلث متساوی‌الساقین هم یک محور تقارن آینه‌ای دارد (شکل ۹).



شکل ۹

اگر می‌خواستیم مشابه یک مثلث دلخواه را داشته باشیم، باید به جای دایره شکل درجه دوم دیگری را می‌گذاشتیم؛ مثلاً بیضی را، آن هم به شکلی که تقارن آینه‌ای وجود نداشته باشد (شکل ۱۰).

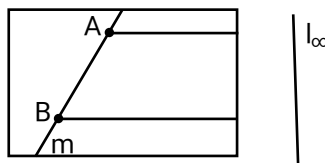


شکل ۱۰

حال با هم ببینیم در مورد مثلث متساوی‌الساقین چه قضایایی را ثابت کرده‌ایم. ابتدا بیایید برای این کلمه‌ها معادل فارسی پیدا کنیم. مثلث را با این دیدگاه جدید به جای سه گوش، «سه‌بر» می‌نامیم. مثلث متساوی‌الساقین را یک «سه بر دو بر مساوی» یا «دو بر همسان» می‌گیریم. می‌توانستیم آن را

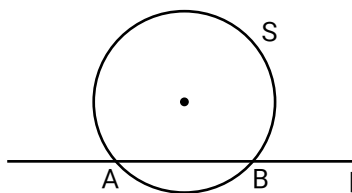
مثلث حدی ثابت کنیم، خواهیم دید که مشابه دایره محیطی برای ABC یک دایره نیست. بلکه از اجتماع دو خط l_0 و خط گذرنده از AB تشکیل شده است (شکل ۶). یعنی اگر در قضیه‌های مثلث معمولی به جای دایره محیطی اجتماع این دو خط را بگذاریم، بسیاری برای مثلث ABC هم قابل اثبات خواهند بود.

شکل ۶



فکری هم داریم که می‌تواند مؤید این جایگزینی باشد. خط معادله‌اش درجه اول است و دو خط معادله‌شان درجه دوم می‌شود که مانند همان دایره است که معادله‌اش درجه دوم است. پس این نتیجه را می‌گیریم که می‌توان به جای دو خط متقاطع هم یک دایره گذاشت. مثلاً باید بتوان در مثلث به جای خط‌های m و n یک دایره قرار داد (شکل ۷).

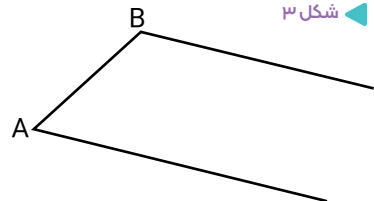
شکل ۷



فرض کنید دایره S خط l را در دو نقطه A و B قطع کند. رأس C را هم نمی‌دانم با چه چیزی جایگزین کنم. می‌پرسم: آیا این شکل می‌تواند مشابه یک مثلث رفتار کند؟ باید توجه کرد که اینجا یک تقارن محوری وجود دارد (شکل ۸).

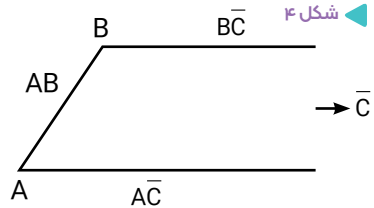
فرض کنید C نقطه‌ای است که روی خطی در بی‌نهایت به نام l_∞ قرار گرفته است. در این صورت مثلث ما به شکل ۳ در می‌آید که ظاهراً از دو رأس A و B ، و دو ضلع به شکل نیم‌خط، به همراه پاره‌خط AB تشکیل شده است.

شکل ۳



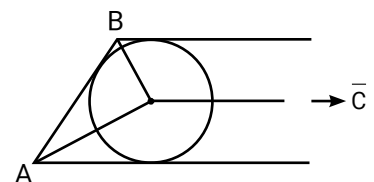
بسیاری از نتایج هندسه اقلیدسی را می‌توان برای چنین مثلثی ثابت کرد. برای رعایت سادگی، نماد ABC را برای این مثلث حدی به کار می‌بریم که در آن رأس C روی l_∞ واقع است. ضلع‌ها را AB ، BC و AC می‌نامیم (شکل ۴) که BC و AC موازی هستند.

شکل ۴



برای مثال، اگر نیمساز زاویه‌های A و B را رسم کنیم و نیمساز زاویه C را خطی موازی BC و AC بگیریم که با آن‌ها هم‌فاصله باشد، باز می‌بینیم که سه نیمساز مثلث ABC هم‌سراند. بنابراین این مثلث هم دایره محاطی داخلی دارد که مرکز آن تقاطع نیمسازهاست (شکل ۵).

شکل ۵



بعد از اینکه چندین قضیه را برای این

از نکته سوم می‌آموزیم که در خط گردی ما لزوماً نباید خط a و دایره S متقاطع باشند. مثلاً ممکن است a بر دایره مماس باشد، یا کاملاً بیرون S قرار داشته باشد.

سؤال پروژه

اکنون نوبت شماست که سعی کنید چندین قضیه هندسه اقلیدسی برای مثلث‌های متساوی‌الساقین را به خط‌گردی‌ها ترجمه و اثبات کنید.

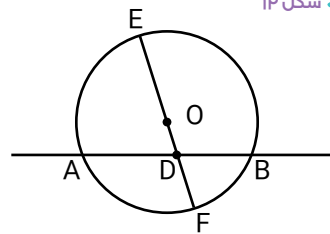
پروژه‌های انجام‌شده خود را با قالب «ورد» (word) حروف‌نگاری کنید و برای ما بفرستید. بهترین پروژه‌ها از طریق رمزینۀ پاسخ‌سریع (کیوآر کد) در شماره‌های آینده چاپ خواهند شد.

قضیه ۲. اگر خط a دایره S را در نقطه‌های A و B قطع کرده باشد، برای هر نقطه D روی پاره‌خط AB اگر خطی از D بر دایره S عمود کنیم و نقاط تقاطع را E و F بنامیم، $DE+DF$ مقداری ثابت است.

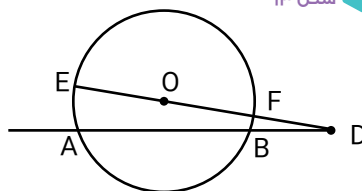
نکته ۱. روشن است که مقدار ثابتی که از آن نام برده شده، همان طول قطر دایره S است.

نکته ۲. اگر نقطه D روی امتداد AB ولی بیرون پاره‌خط AB باشد، باز هم قضیه درست است. اما مانند حالت مثلث متساوی‌الساقین باید تفاضل فاصله‌ها را در نظر گرفت.

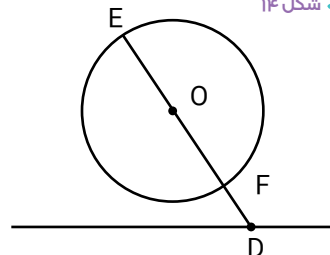
نکته ۳. این قضیه حتی اگر خط a دایره S را قطع نکند هم صحیح است (شکل‌های ۱۲ تا ۱۴).



شکل ۱۲



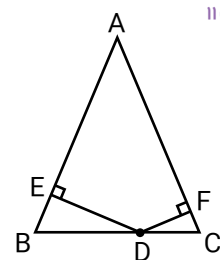
شکل ۱۳



شکل ۱۴

یک «سه گوش دو گوش همسان» هم بخوانیم. می‌توانستیم به جای همسان، همان‌دازه هم بگوییم. ما به جای سه بر، یک خط گردی جایگزین کرده‌ایم.

قضیه ۱. در یک مثلث متساوی‌الساقین ABC که در آن اضلاع AB و AC برابرند. مجموع فاصله‌های هر نقطه D روی ضلع BC از دو ضلع AB و AC عددی ثابت است (شکل ۱۱).



شکل ۱۱

یعنی اگر پای ارتفاع‌ها از D به AB و AC را E و F بنامیم، می‌گوییم $DE+DF$ عددی ثابت است. حال همین قضیه را به زبان فارسی ترجمه می‌کنیم.

گزاره ۱. در یک سه‌برِ دو‌برِ همسان، هر نقطه روی برِ پایه، از دو ساق برابر، دارای جدایی‌های با برهم‌نهی پایا است. به جای فاصله نوشتیم «جدایی» و به جای مجموع نوشتیم «برهم‌نهی»، و به جای ثابت نیز نوشتیم «پایا».

اگر می‌خواهید بدانید این مقدار ثابت چقدر است، حالتی حدی را که D روی B یا روی C قرار می‌گیرد، در نظر بگیرید. یکی از DE و DF برابر صفر و دیگری برابر ارتفاع وارد بر ساق خواهد بود. اثبات قضیه بالا را به دانش‌آموزان واگذار می‌کنیم. توجه کنید که اگر D روی امتداد BC خارج از ضلع BC باشد، باز هم قضیه درست است؛ به شرط آنکه تفاضل فاصله‌ها را در نظر گرفته باشیم. حال توجه کنید که این قضیه برای خط‌گردی ما هم درست است.